## Chapitre 6 :

# Les tests paramétriques

Pour effectuer un test statistique on doit d'abord émettre des hypothèses concernant un paramètre de la population (moyenne, proportion …) afin de vérifier par la suite la véracité de ces hypothèses.

### <u>I- La procédure du test :</u>

Supposons qu'on veut effectuer le test suivant

$$\begin{cases} H_0 : \theta = \theta_0 \\ H_1 : \theta \neq \theta_0 \end{cases}$$

La décision va s'effectuer sur la base des résultats d'un échantillon. Deux types de décisions erronées que l'on appellera erreurs peuvent être prises :

- On appelle erreur de première espèce le fait de rejeter à tort l'hypothèse $H_0$.

La probabilité correspondante à cette erreur est appelée risque de première espèce :$\alpha$

$\alpha$ =P(rejeter $H_0$ /$H_0$ vraie )=P(décider $H_1$ / $\theta = \theta_0$)

- On appelle erreur de seconde espèce le fait de rejeter à tort l'hypothèse $H_1$. La probabilité correspondante à cette erreur est appelée risque de seconde espèce :$\beta$

$\beta$= P (rejeter $H_1$/ $H_1$ vraie) = P(décider $H_0$/ $\theta \neq \theta_0$)

| | | Décision | |
|---|---|---|---|
| | | $H_0$ retenue | $H_1$ retenue |
| Réaliste | $H_0$ vraie | Bonne décision (1- $\alpha$) | Erreur de première espèce ($\alpha$) |
| | $H_1$ vraie | Erreur de seconde espèce( $\beta$) | Bonne décision (1- $\beta$) |

- On appelle puissance du test : $\eta$= 1- $\beta$
- On appelle région critique d'un test, la région de rejet de l'hypothèse $H_0$

La démarche à suivre pour effectuer un test est la suivante :

- Enoncer les hypothèses $H_0$ et $H_1$ ($H_0$ est l'hypothèse à laquelle on croît le plus)
- Préciser la loi de la variable dans la population
- Préciser la statistique utilisée et sa distribution au niveau de l'échantillon
- Déterminer en fonction du risque de première espèce $\alpha$ la frontière de la région critique
- Si la valeur observée à partir de l'échantillon appartient à la région critique, on rejette $H_0$ sinon on accepte cette hypothèse.

## II- Test sur une moyenne :

Pour la détermination de la région critique, on va se placer dans le cas où la variable étudiée est distribué au niveau de la population suivant une loi normale de moyenne m inconnue qu'on va tester et un écart type σ connu.

### 1-Test unilatéral à droite :

Les hypothèses du test se présentent sous la forme :

$$\begin{cases} H_0 : m = m_0 \\ H_1 : m > m_0 \end{cases}$$

La variable X étudiée au niveau de la population suit une loi normale de paramètres m et σ,avec σ connu. Ainsi la distribution de X au niveau de l'échantillon sera :

$$\overline{X} \rightarrow N(m, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}) \quad d'où \quad \frac{\overline{X} - m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \rightarrow N(0,1)$$

On commence par déterminer la frontière de la région critique ( c )

$\alpha = P$ (rejeter $H_0/H_0$ vraie)

$\alpha = P$ ($m>m_0$ /$m=m_0$)

La décision se fait compte tenu de la valeur de $\overline{X}$ calculée au niveau de l'échantillon

$P(\overline{X} > c \,/\, m=m_0)= \alpha$

$$P(\frac{\overline{X}-m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \succ \frac{c-m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} / m=m_0)=\alpha$$

$$P(X^* \succ \frac{c-m_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}})=\alpha$$

$$P(X^* \succ \frac{c-m_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}})=1-\alpha$$

$$D'ou \quad \rightarrow \quad t_\alpha = \frac{c-m_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

On détermine la valeur de $t_\alpha$ à partir de la table de la loi normale. Ainsi la frontière de la région critique aura pour expression :

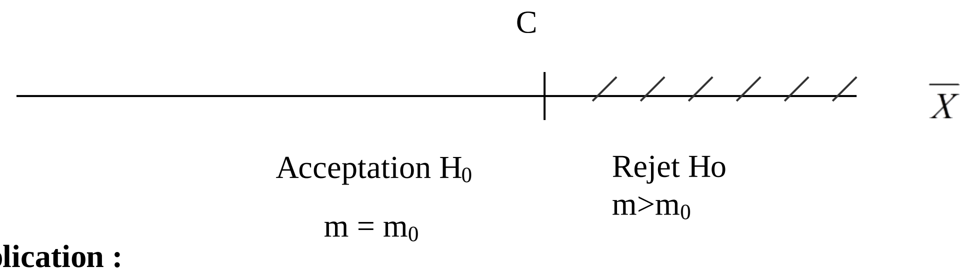
$$c=m_0+t_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Règle de décision :

- Rejet de $H_0$ si la valeur de $\overline{X} > c$

- Acceptation de $H_0$ si la valeur de $\overline{X} \leq c$

**Axe :**




**Application :**

Une machine est réglée afin de verser 500 grammes de poudre de chocolat dans les sachets. Les statistiques du service de production montrent que le poids versé dans ces sachets suit une loi normale d'écart type 9 grammes. Un échantillon de 9 sachets prélevés au hasard a donné un poids net moyen de 504 grammes. Tester au seuil de 1% si la machine est en train de verser plus de 500 grammes dans les sachets.

Soit X le poids versé dans les sachets. $X \rightarrow N(m, \sigma)$,

$\sigma = 9$, et $n = 9$ d'où $\overline{X} \rightarrow N(m, \sigma / \sqrt{n})$

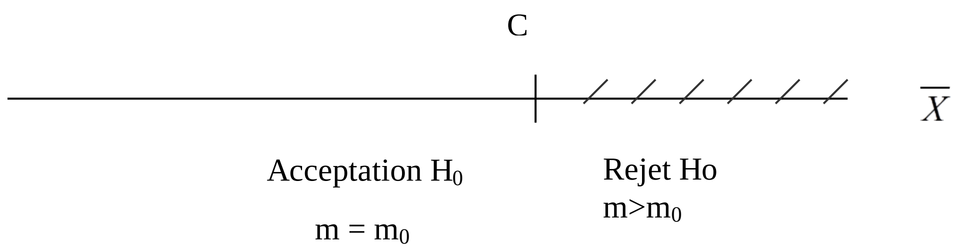
Le test d'hypothèse consiste à vérifier si la machine est en train de verser 500 grammes ou plus. ($m_0 = 500$).

Il s'agit donc d'un test à droite qui s'exprime ainsi :

$$\begin{cases} H_0 : m = 500 \\ H_1 : m > 500 \end{cases}$$

La règle de décision est donc rejet de $H_0$ si $\overline{X} > c$ avec c = $= m_0 + t_\alpha \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$

**Axe :**




$\alpha = 0.01 \rightarrow F(t_\alpha) = 0.99 \rightarrow t_\alpha = 2.33$ d'où $c = 500 + 2.33 \times (9/\sqrt{9}) = 506.99$

$\overline{X} = 504 < c \rightarrow$ on retient l'hypothèse $H_0$

**<u>2- Test unilatéral à gauche :</u>**

Les hypothèses du test se présentent sous la forme :

$$\begin{cases} H_0 : m = m_0 \\ H_1 : m < m_0 \end{cases}$$

La variable X étudiée au niveau de la population suit une loi normale de paramètres N(m,σ) avec σ connu. Ainsi la distribution de $\overline{X}$ au niveau de l'échantillon sera :

$$\overline{X} \rightarrow N(m, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}) d'ou \frac{\overline{X}-m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \rightarrow N(0,1)$$

Détermination de la frontière de la région critique ( c )

α =P (rejeter $H_0$/$H_0$ varie)

α =P ($m<m_0$/$m=m_0$)

La décision se fait compte tenu de la valeur de $\overline{X}$ calculée au niveau de l'échantillon.

P( $\overline{X}$ <c/ $m=m_0$)= α

$$P(\frac{\overline{X}-m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} < \frac{c-m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} / m=m_0) = \alpha$$

$$P(X^* < \frac{c-m_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}) = \alpha$$

Or α<0,5 d'où $\frac{c-m_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} < 0$ on aura ainsi

$$P(X^* < \frac{m_0-c}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}) = 1-\alpha$$

$$D'ou \rightarrow t_\alpha = \frac{m_0-c}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

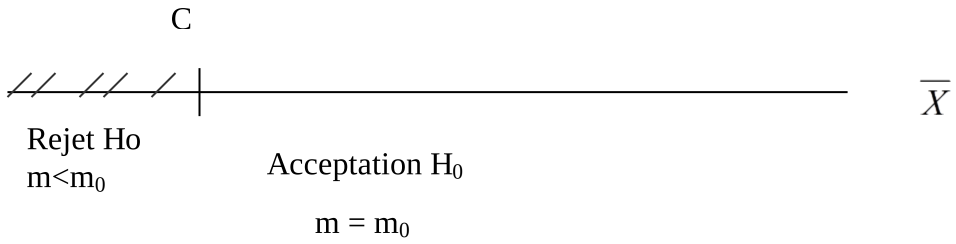
On détermine la valeur de $t_\alpha$ à partir de la table de la loi normale. Ainsi la frontière de la région critique aura pour expression :

$$c = m_0 - t_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

**Règle de décision**

- Rejet de $H_0$ si la valeur de $\overline{X}$ <c
- Acceptation de $H_0$ si la valeur de $\overline{X} \geq c$

**Axe :**




**Application :**

Une machine est réglée afin de verser 500 grammes de poudre de chocolat dans les sachets. Les statistiques du service de production montrent que le poids versé dans ces sachets suit une loi normale d'écart type 9 grammes. Un échantillon de 9 sachets prélevés au hasard a donné un poids net moyen de 495 grammes. Tester au seuil de 5% si la machine est en train de verser moins que 500 grammes dans les sachets.

Soit X le poids versé dans les sachets. $X \rightarrow N(m, \sigma)$,

$\sigma = 9$, et n = 9 d'où $\overline{X} \rightarrow N(m, \sigma / \sqrt{n})$

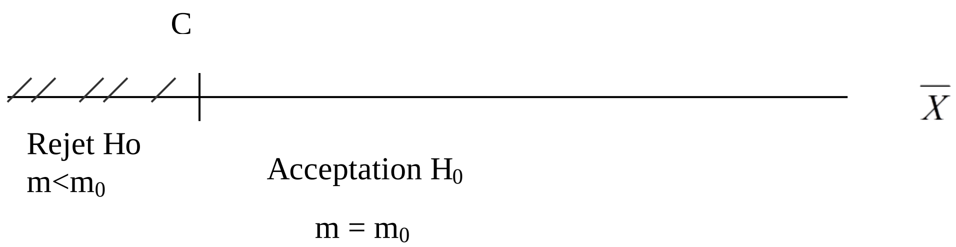
Le test d'hypothèse consiste à vérifier si la machine est en train de verser 500 grammes ou moins. ($m_0 = 500$).

Il s'agit donc d'un test à droite qui s'exprime ainsi :

$$\begin{cases} H_0 : m = 500 \\ H_1 : m < 500 \end{cases}$$

La règle de décision est donc rejet de $H_0$ si $\overline{X} < c$ avec $c = m_0 - t_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

**Axe :**




$\alpha = 0.05 \rightarrow F(t_\alpha) = 0.95 \rightarrow t_\alpha = 1.65$ d'où $c = 500 - 1.65 \times (9/\sqrt{9}) = 495.05$

$\overline{X} = 495 < c \rightarrow$ on retient l'hypothèse $H_1$

**<u>3- Test bilatéral :</u>**

Les hypothèses du test se présentent sous la forme :

$$\begin{cases} H_0 : m = m_0 \\ H_1 : m \neq m_0 \end{cases}$$

La variable X étudiée au niveau de la population suit une loi normale de paramètre m et $\sigma$, avec $\sigma$ connu .Ainsi la distribution de $\overline{X}$ au niveau de l'échantillon sera :

$$\overline{X} \rightarrow N(m, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}) d'ou \frac{\overline{X} - m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \rightarrow N(0,1)$$

Détermination de la région critique :

$\alpha = P$ (rejeter $H_0$ / $H_0$ vraie )

$\alpha = P(m < m_0 / m = m_0) + P(m > m_0 / m = m_0)$

$P(m < m_0 / m = m_0) = \alpha/2$

$P(m > m_0 / m = m_0) = \alpha/2$

La décision se fait compte tenu de la valeur de $\overline{X}$ calculée au niveau de l'échantillon.

$P(\overline{X} < c_1 / m = m_0) = \alpha/2$

$P(\overline{X} > c_2 / m = m_0) = \alpha/2$

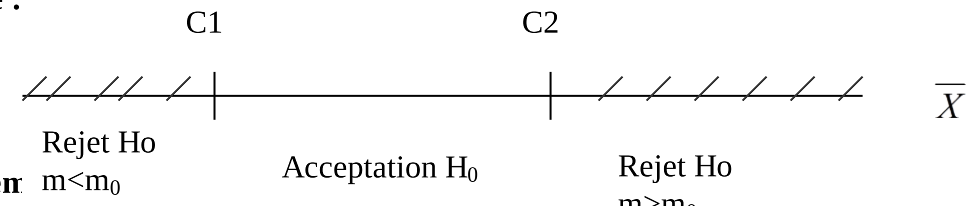
D'ou :

$c_1 = m_0 - t_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

$c_2 = m_0 + t_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

**Décision** : rejet de $H_0$ si $\overline{X} < c_1$ ou $\overline{X} > c_2$

**Axe :**




**Exem**

Une machine est réglée afin de verser du lait dans [illegible]es de 500 ml le volume de lait versé suit une loi normal d'écart type 5 ml .Un échantillon de 10 bouteilles a donné un volume moyen de 496, 7 ml.

Peut-on conclure au seuil de 5% que la machine est déréglée?

Soit X le poids versé dans les sachets. $X \rightarrow N(m, \sigma)$,

$\sigma$ =5, et n = 10 d'où $\overline{X} \rightarrow N(m, \sigma / \sqrt{n})$

Le test d'hypothèse consiste à vérifier si la machine est en train de verser 500 grammes ou pas ($m_0$ = 500). Il s'agit donc d'un bilatéral qui s'exprime ainsi :

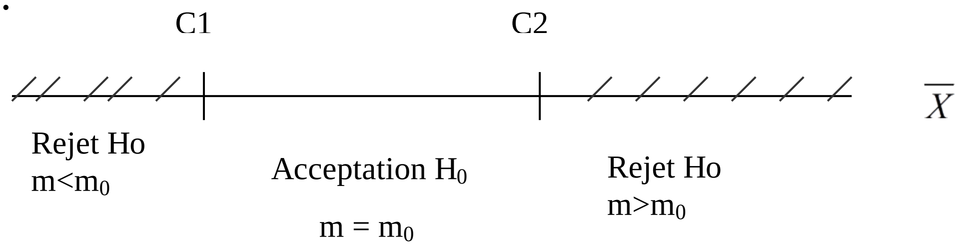
$$\begin{cases} H_0 : m = 500 \\ H_1 : m \neq 500 \end{cases}$$

La règle de décision est donc rejet de $H_0$ si $\overline{X} < c_1$ ou $\overline{X} > c_2$ avec :

$c_1 = m_0 - t_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

$c_2 = m_0 + t_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

**Axe :**




$1 - \alpha = 0.95 \rightarrow \alpha = 0.05 \rightarrow \alpha_{/2} = 0.025 \rightarrow F(t_{\alpha/2}) = 0.975 \rightarrow t_{\alpha/2} = 1.96$ d'où :

$c_1 = m_0 - t_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 500 - 1.96 \times \frac{5}{\sqrt{10}} = 496.901$

$c_1 = m_0 + t_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 500 + 1.96 \times \frac{5}{\sqrt{10}} = 503.099$

$\overline{X} = 496.7 < c_1 \rightarrow$ on retient l'hypothèse $H_1$

**Remarque :** Les expressions des frontières des régions critiques doivent être modifiées lorsqu'on change la distribution de $\overline{X}$ .

**III- Test sur une proportion :**

Pour effectuer un test sur une proportion on utilise la distribution suivante :

$$f \to N(p, \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}})$$

$$\frac{f-p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} \to N(0,1)$$

**1- Test unilatéral à droite :**

Les hypothèses du test sont :

$$\begin{cases} H_0 : p = p_0 \\ H_1 : p > p_0 \end{cases}$$

Il faut déterminer la frontière c de la région critique.

P (rejet $H_0$/ $H_0$ vraie)=α

P(f>c p=$p_o$)= α

$$P(\frac{f-p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} \succ \frac{c-p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}}) = \alpha$$

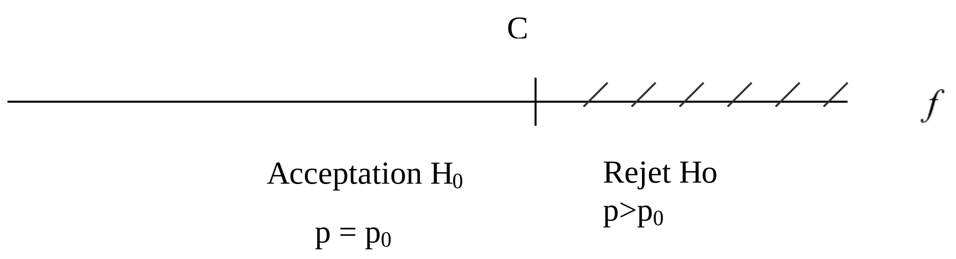
$$P(X^* < \frac{c-p_o}{\sqrt{\frac{p_o(1-p_0)}{n}}}) = 1-\alpha$$

$$t_\alpha = \frac{c-p_o}{\sqrt{\frac{p_o(1-p_0)}{n}}}$$

D'ou $c = p_0 + t_\alpha \sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}$

**Règle de décision** : Rejet de Ho si f > c et acceptation de Ho si f $\leq$ c

**Axe :**



**Exemple :**

Aux dernières élections, un parti politique a obtenu 42% des suffrages. Un récent sondage a révélé que sur 1041 personnes interrogées 458 accordaient leur appui à ce parti. Le chef du parti déclara que a popularité de son parti était à la hausse. Tester la validité de cette affirmation au seuil de 5%.

Soit p la proportion des votes pour le parti politique et f la proportion empirique des votes observée sur l'échantillon.

$$f \to N\left(p, \sqrt{\frac{pq}{n}}\right) \quad d'où \quad \frac{f-p}{\sqrt{\frac{pq}{n}}} \to N(0,1)$$

f= k /n =458/1041 = 0.4399

Le test d'hypothèse consiste à vérifier si la proportion des votes est égale à l'ancienne valeur de 0.42 ou supérieure à cette valeur. Il s'agit donc d'un test unilatéral à droite sur la proportion qui s'exprime ainsi :

$$\begin{cases} H_0 : p = 0.42 \\ H_1 : p > 0.42 \end{cases}$$

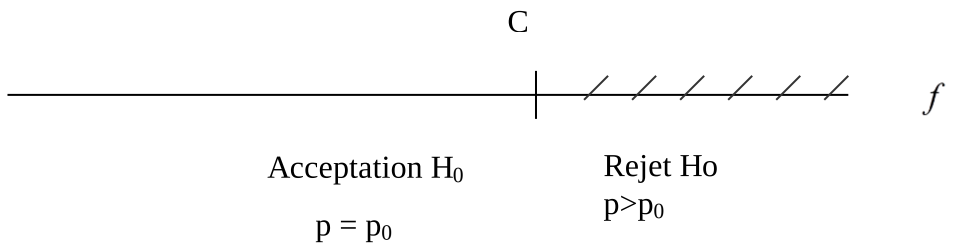
La règle de décision est donc rejet de $H_0$ si $f > c$.

avec $c = p_0 + t_\alpha \sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}$

$\alpha = 0.05 \to F(t_\alpha) = 0.95 \to t_\alpha = 1.65$

$$c = 0.42 + 1.65\sqrt{\frac{0.42x0.58}{1041}} = 0.4452$$

**Axe :**




f= k /n = 0.4399<c → on rejette l'hypothèse $H_1$ selon laquelle la popularité de ce parti était à la hausse.

**<u>2- Test unilatéral à gauche :</u>**

Les hypothèses du test sont :

$$\begin{cases} H_0 : p = p_0 \\ H_1 : p < p_0 \end{cases}$$

Il faut déterminer la frontière c de la région critique
P(rejet $H_0$/$H_0$ vraie)= α
P(f<c / p=$p_0$)= α

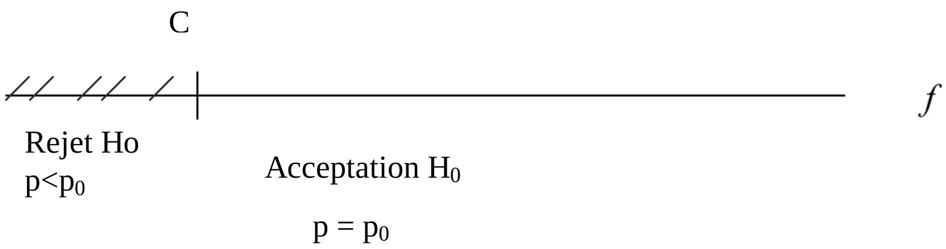
$$P(X^* \prec \frac{c-p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}})=\alpha$$

$$P(X^* \prec \frac{p_0-c}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}})=1-\alpha$$

d'ou $\frac{p_0-c}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}}) = t_\alpha$

D'ou $c = p_0 - t_\alpha \sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}$

**Axe et règle de décision :**




**<u>3- Test bilatéral :</u>**
Les hypothèses du test sont :

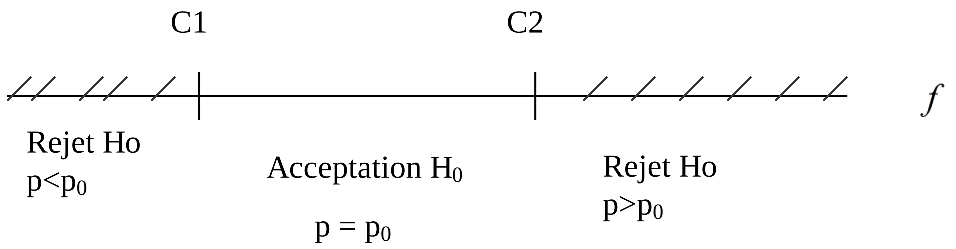
$$\begin{cases} H_0 : p = p_0 \\ H_1 : p \neq p_0 \end{cases}$$

P(rejet $H_0$/$H_0$ vraie)= α

P(f>$c_1$ / P=$P_0$)+p(f<$c_2$ / P=$P_0$)= α
P(f>$c_1$ / P=$P_0$)= α/2
p(f<$c_2$ / P=$P_0$)= α/2
d'où :

$$c_1 = p_0 - t_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}} \;;\; c_2 = p_0 + t_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}$$

**Axe et règle de décision :**




## IV- Test sur la différence de deux moyennes :

Supposons qu'on veut effectuer un test sur la différence $m_1$-$m_2$ des moyennes de 2 populations qui sont normalement distribuées.
Si les écarts types sont connus, la statistique à utiliser est :

$$\frac{(\overline{X}_1-\overline{X}_2)-(m_1-m_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \rightarrow N(0,1)$$

L'expression de la région critique se détermine de la même façon que les tests précédents :

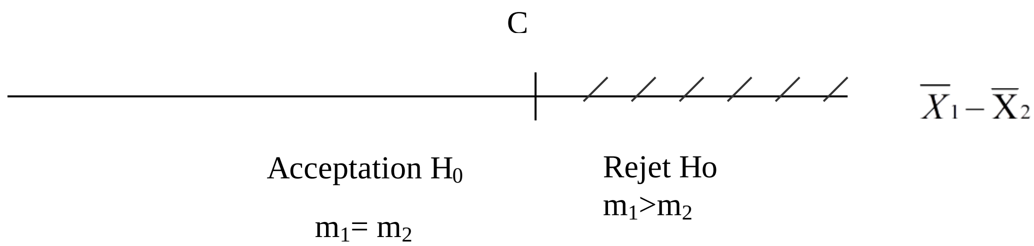
### 1- Test unilatéral à droite :

Les hypothèses du test sont :

$$\begin{cases} H_0 : m_1-m_2=0 \quad \rightarrow \; m_1= m_2 \\ H_1 : m_1-m_2>0 \; \rightarrow m_1 \; > m_2 \end{cases}$$

$$c = t_\alpha \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}$$

**Axe et règle de décision**



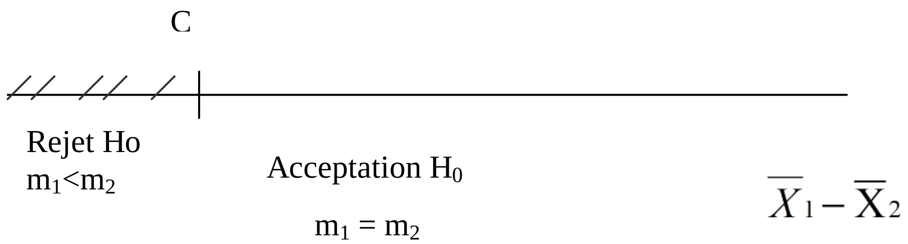

### 2- Test unilatéral à gauche :

Les hypothèses du test sont :

$$\begin{cases} H_0 : \; :m_1-m_2=0 \; \rightarrow \; m_1= m_2 \\ H_{1:} : m_1-m_2<0 \; \rightarrow m_1 < m_2 \end{cases}$$

$$c = -\ t_{\alpha} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$$

**Axe et règle de décision**




**<u>3- Test bilatéral :</u>**

Les hypothèses du test sont :

$$\begin{cases} H_0 : m_1 - m_2 = 0 \quad \rightarrow \quad m_1 = m_2 \\ H_1 : m_1 - m_2 \neq 0 \quad \rightarrow \quad m_1 \neq m_2 \end{cases}$$

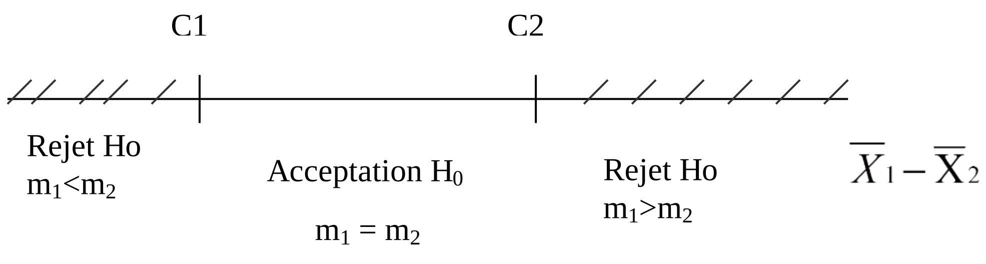
La règle de décision est donc le rejet de $H_0$ si $\overline{X}_1 - \overline{X}_2 < c_1$ ou si $\overline{X}_1 - \overline{X}_2 > c_2$

Avec :

$$c_1 = -\ t_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$$

$$c_2 = t_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$$

**Axe et règle de décision**




**Remarque** : Dans le cas où les variances sont inconnues, on utilise la distribution suivante :

$$\frac{(X_1 - X_2) - (m_1 - m_2)}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}} \rightarrow T(n_1 + n_2 - 2)$$

et si $(n_1 + n_2 - 2 \geq 30)$ On utilise alors l'approximation par la loi normale centrée réduite.

**Application :**
On a effectué des essais sur la durée de vie des ampoules de 60 Watts fabriquées par deux différentes entreprises. Les essais effectués dans les mêmes conditions sur un échantillon de 40 lampes de chaque entreprise ont donné les résultats suivants :

| | | | |
|---|---|---|---|
| Entreprise 1 | $n_1=40$ | $X_1=1025h$ | $S_1=120h$ |
| Entreprise2 : | $n_2= 40$ | $X_2= 1070h$ | $S_2= 140h$ |

Peut-on affirmer au seuil de signification de 5% que les ampoules de l'entreprise 1 ont une durée de vie inférieure à celles de l'entreprise 2.

Soit $X_1$ la durée de vie des ampoules de l'entreprise 1 et $X_2$ la durée de vie des ampoules de l'entreprise 2. $X_1 \rightarrow N(m_1, \sigma_1)$ et $X_2 \rightarrow N(m_2, \sigma_2)$

$\sigma_1$ et $\sigma_2$ sont inconnus, et $(n_1+n_2- 2 = 78 >30)$ la statistique à utiliser est donc :

$$\frac{(\overline{X}_1-\overline{X}_2)-(m_1-m_2)}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}}} \rightarrow N(0,1)$$

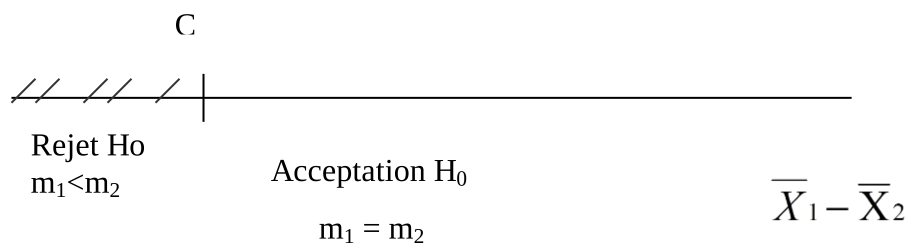
Le test d'hypothèse consiste à vérifier si la durée de vie des ampoules de l'entreprise est inférieure à celles fabriquées par l'entreprise 2. Il s'agit donc d'un test bilatéral à gauche sur la différence de deux moyennes qui s'exprime ainsi :

$$\begin{cases} H_0 : m_1-m_2=0 \rightarrow m_1= m_2 \\ H_1 : m_1-m_2 < 0 \rightarrow m_1 < m_2 \end{cases}$$

La règle de décision est donc le rejet de $H_0$ si $\overline{X}_1 - \overline{X}_2 < c$ , Avec

$$c = - t_\alpha \sqrt{\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}}$$

**Axe et règle de décision**




$\alpha = 0.05 \rightarrow F(t_\alpha) = 0.95 \rightarrow t_\alpha = 1.65$ d'où :

$$c = - 1.65 \sqrt{\frac{120^2}{40}+\frac{140^2}{40}} = - 48.1054$$

$\overline{X}_1 - \overline{X}_2$ = 1025-1070 = -45 > c → on accepte l'hypothèse $H_0$ → La durée de vie des ampoules de l'entreprise 1 n'est inférieure à celle de l'entreprise 2.

## V- Test sur la différence de deux proportions

Supposons qu'on veut effectuer un test sur la différence de deux proportions $p_1$-$p_2$

La statistique à utiliser est :

$$\frac{(f_1 - f_2) - (p_1 - p_2)}{\sqrt{\frac{p_1(1-p_1)}{n_1} + \frac{p_2(1-p_2)}{n_2}}} \to N(0,1)$$

Sous l'hypothèse $H_0$ les valeurs $p_1$ et $p_2$ sont inconnus mais supposées égales à une valeur commune p. on obtient une estimation de cette valeur en combinant les observations dans chaque échantillon.

D'ou $p = \frac{n_1 f_1 + n_2 f_2}{n_1 + n_2}$

$$\frac{(f_1 - f_2) - (p_1 - p_2)}{\sqrt{p(1-p)(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2})}} \to N(0,1)$$

L'expression de la région critique se calcule de la même façon que les tests précédents :

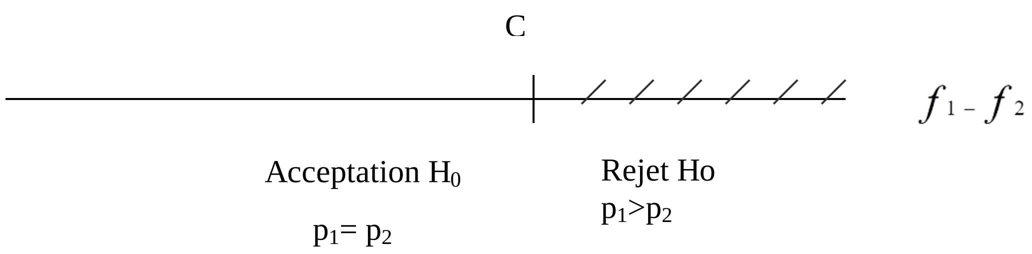
**1- Test unilatéral à droite :**

Les hypothèses du test sont :

$$\begin{cases} H_0 : p_1 - p_2 = 0 \\ H_1 : p_1 - p_2 > 0 \end{cases}$$

c = $t_\alpha \sqrt{p(1-p)(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2})}$

**Axe et règle de décision**



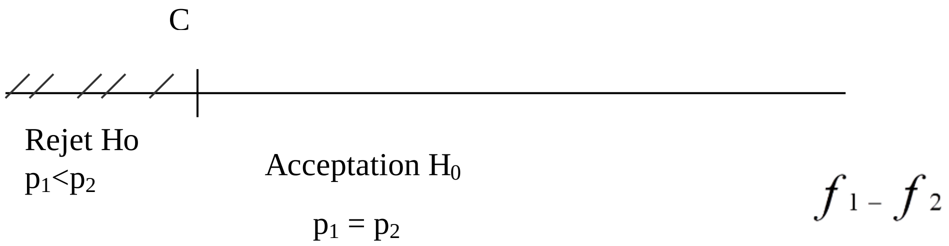

**2- Test unilatéral à gauche :**

Les hypothèses du test sont :

$$\begin{cases} H_0 : p_1 - p_2 = 0 \to p_1 - p_2 = 0 \\ H_1 : p_1 - p_2 < 0 \to p_1 < p_2 \end{cases}$$

$$c = -\ t_{\alpha}\sqrt{p(1-p)\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)}$$

**Axe et règle de décision**




**<u>3- Test bilatéral :</u>**

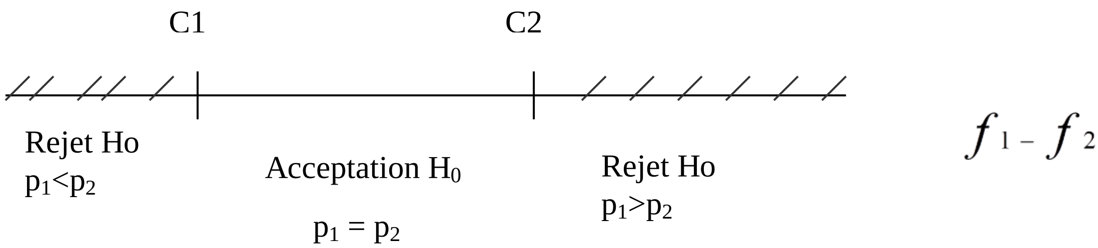
Les hypothèses du test sont :

$$\begin{cases} H_0 : p_1-p_2 = 0 \ \rightarrow \ p_1 = p_2 \\ H_1 : p_1-p_2 \neq 0 \ \rightarrow \ p_1 \neq p_2 \end{cases}$$

$$c_1 = -\ t_{\alpha/2}\sqrt{p(1-p)\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)}$$

$$c_2 = t_{\alpha/2}\sqrt{p(1-p)\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)}$$

**Axe et règle de décision**




**Exemple :**

Pour la promotion de son nouveau produit, la direction commerciale d'une entreprise émet l'hypothèse selon laquelle la publicité du type A serait plus efficace que celle du type B. une enquête auprés de 125 individus ayant vu la publicité A a montré que 44 d'entre eux ont acheté le produit alors que sur 100 personnes ayant vu la publicité B, 32 ont acheté le produit.

Est- ce que les résultats de ce sondage permettent de confirmer au seuil de signification de 5%, l'hypothèse émise par la direction commerciale ?

Soit $P_1$ et $P_2$ les proportions des acheteurs exposés aux publicités A et B, et $f_1$ et $f_2$ les proportions observé des acheteurs ayant vu les publicités A et B.

$f_1 = k_1/n_1 = 44/125 = 0.352$ et $f_2 = k_2/n_2 = 32/100 = 0.32$.

$$\frac{(f_1 - f_2) - (p_1 - p_2)}{\sqrt{\dfrac{p_1(1-p_1)}{n_1} + \dfrac{p_2(1-p_2)}{n_2}}} \rightarrow N(0,1)$$

Le test d'hypothèse consiste à vérifier si la publicité A est plus efficace ou pas que la publicité B. Ce test s'exprime ainsi :

$$\begin{cases} H_0 : p_1 = p_2 \rightarrow p_1 - p_2 = 0 \\ H_1 : p_1 > p_2 \rightarrow p_1 - p_2 > 0 \end{cases}$$

Sous l'hypothèse $H_0$ les valeurs $p_1$ et $p_2$ sont inconnus mais supposées égales à une valeur commune p. on obtient une estimation de cette valeur en combinant les observations dans chaque échantillon.

D'où $p = \dfrac{n_1 f_1 + n_2 f_2}{n_1 + n_2} = \dfrac{44+32}{125+100} = 0.3378$

$$\frac{(f_1 - f_2) - (p_1 - p_2)}{\sqrt{p(1-p)(\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2})}} \rightarrow N(0,1)$$

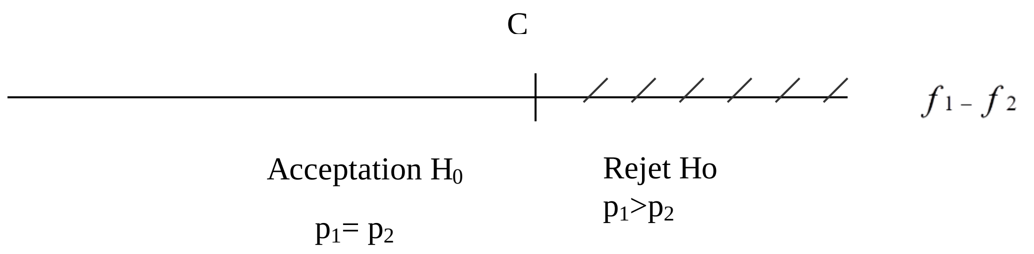
La règle de décision est donc le rejet de $H_0$ si $f_1 - f_2 > c$.

Avec $c = t_\alpha \sqrt{p(1-p)(\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2})}$

$\alpha = 0.05 \rightarrow F(t_\alpha) = 0.95 \rightarrow t_\alpha = 1.65$

$c = 1.65 \sqrt{0.3378 x 0.6622 (\dfrac{1}{125} + \dfrac{1}{100})} = 0.1047$

**Axe et règle de décision**




$f_1 - f_2 = 0.352 - 0.32 = 0.032 < c \rightarrow$ on accepte $H_0$ (les efficacités des deux publicités sont identiques).