Chapitre 2 : Les lois usuelles de probabilité

I- La loi binomiale :

Soit une épreuve aléatoire dans laquelle il n'existe que deux résultats possibles, l'un étant qualifié de favorable et l'autre de défavorable (échec et succès).

Soit p la proportion du cas favorable q=1-p celle du cas défavorable. On réalise n'épreuves identiques et indépendantes et on notera :

X la VA : « Nombre de résultats favorables »

La probabilité que cette variable prenne une valeur particulière x est :

$$P(X = x) = C_n^x P^x (1 - P)^{n-x} = C_n^x P^x q^{n-x}$$

Cette relation définit la loi binomiale de probabilité. Elle dépend de deux paramètres n et p. Il existe différentes tables de probabilité qui indiquent la probabilité simple P(X=x) ou la probabilité cumulé $P(X \leq x)$

1- Conditions d'application de la loi :

- L'épreuve est dichotomique, elle ne comporte que deux résultats possibles.
- Les répétitions de cette épreuve sont mutuellement indépendantes, ainsi la probabilité du cas favorable p est constante.

2- Caractéristiques de la loi :

Soit X une VA qui suit une loi binomiale de paramètres n et p. On notera alors :

$X \longrightarrow B(n,p)$

Les paramètres de cette loi sont :

E(X)= np

V(X) = np (1-p)=npq

Exemple:

On jette dix fois une pièce de monnaie et on considère X la VA nombre de faces obtenues.

On aura alors $X \longrightarrow B(10, 0,5)$

D'ou: E(X) = 10x0.5=5

V(X)= 10x0.5x 0.5=2.5

II- La loi de poisson :

Lorsque le nombre des épreuves devient très grand (n), et que la probabilité du cas favorable devient très faible (p) on démontre que la loi binomiale tend vers la forme limite :

$$P(X=x)=\frac{(np)^x e^{-np}}{x!}$$

Cette nouvelle loi ainsi définie est appelée loi de poisson qui est qualifiée de loi des événements rares du fait que p est très faible.

On note souvent λ= np avec $X \longrightarrow P(\lambda)$ d'ou :

$$P(X=x)=\frac{(\lambda)^x e^{-\lambda}}{x!}$$

1- Conditions d'application de la loi :

- Les conditions d'application de la loi binomiale sont réunies (épreuve dichotomique)
- La probabilité du cas favorable est faible (événement rare)
- Le nombre des épreuves est très grand

2- Caractéristiques de la loi :

Soit X une VA tel que : X P $\longrightarrow$ P(λ) les paramètres de cette loi sont :

E(X)= λ

V(X)= λ

Il existe différentes tables de probabilité de la loi de poisson qui indiquent la probabilité simple(X=x) ou la probabilité cumulé $P(X\leq x)$. Cette loi s'applique au cas d'un nombre rare d'évènement pendant une période de temps file d'attente. Si un évènement surgit avec une proportion p pendant une période de temps limité t(au point que l'évènement ne peut se produire au plus qu'une seule fois pendant t) , alors la probabilité que ledit évènement se produise x fois pendant dans une période plus longue T est régie par une loi de poisson de paramètre λ= n p avec n = T/t

Exemple : Supposons qu'un standardiste reçoit deux appels par minute, t doit correspondre à une unité de temps plus faible que la minute soit, la seconde avec une probabilité de recevoir un appel de 2/60= 1/30, le nombre d'appels reçus pendant cinq minutes suit une loi de poisson de paramètre λ= n p = 300 /30 = 10

III- La loi normale :

La loi normale (ou loi de Gauss- Laplace) est une loi de probabilité continue dont la densité de probabilité est donnée par l'expression :

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2II}} \exp^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2}$$

m et σ sont les paramètres de la loi, respectivement sa moyenne et son écart type.

Pour noter qu'une variable aléatoire X suit une loi de moyenne m et d'écart type σ on écrit :

X $\rightarrow$ N(m, σ)

1- Caractéristiques de la loi :

- Graphiquement, la courbe représentative de la loi normale à l'allure d'une courbe en cloche : elle est symétrique par rapport à m abscisse pour lequel elle passe par un maximum et elle admet l'axe des x comme asymptote.

- La fonction y=P(x) est entièrement définie et connue dès l'instant où l'on connaît les valeurs des paramètres m et σ .

2- Conditions d'application de la loi :

La loi normale tire son importance du fait que sous certaines conditions plusieurs autres lois de probabilité convergente vers elle. On démontre notamment que la somme de variables aléatoires indépendantes obéissant à des lois de probabilité quelconques tend vers une loi normale lorsque le nombre de ces variables augmente indéfiniment (théorique central limite).

D'autre part, on peut dire qu'une variable X est distribué normalement si :

- Les facteurs de variation de X sont nombreux
- Les fluctuations de X dues à ces différents facteurs sont indépendantes les uns des autres
- Les fluctuations de X dues à ces différents facteurs doivent être suffisamment petites et approximativement du même ordre de grandeur.

3- La loi normale centrée réduite :

On considère la variable aléatoire X $\rightarrow$ N(m, σ) et on veut calculer la probabilité suivante : $P(X<x_1)$. Le problème c'est qu'on ne dispose pas d'une table de probabilité pour les différentes lois normales (suivant les valeurs de m et σ) car il faudra prévoir une infinité.

Il faut alors procéder au changement de variable suivant :

$$U = \frac{X-m}{\sigma}$$

Cette nouvelle variable aléatoire U obéit à une loi normale réduite (LNCR) du fait que :

E(U)= m=0 (variable centrée)

V(U)= σ =1 (variable réduite)

Ainsi la probabilité qu'on veut calculer sera : $P(\frac{X-m}{\sigma} \langle \frac{x_1 - m}{\sigma})$

L'intérêt de ce changement de variable est qu'il permet de ramener n'importe quelle distribution normale à une même loi de probabilité qui est la loi normale centrée réduite N(0,1). Pour laquelle on dispose de tables de probabilité. Puisque cette loi est symétrique alors on a :

$U \rightarrow$ N(0,1)

Si P (U< a) , a > 0 est connue, alors

P (U< - a) = 1 - P (U< a)

P (-a < U < a) = P (U< a) - P (U< - a) = P (U< a) – [1 - P (U< a)]

= 2 P (U< a) - 1

Application :

Soit X ⟶ N (100,10).

Calculer les probabilités suivantes :

- P(X<110)
- P(X>105)
- P (110<X<120)

Corrigé :

- P(X<110) = P [(X -100)/10 < (110-100)/10] = P (U < 1) = F (1) = 0.8413
- P (X > 105) = P [(X-100)/10 > (105 – 100)/10] = P (U > 0.5)
  = 1 – P (U < 0.5) = 1 – F (0.5) = 1 - 0.6915 = 0.3085
- P (110<X<120) = P [(110-100)/10 < (X-100)/10 < (120-100)/10]
  = P (1 < U < 2) = F(2) – F (1) = 0.9772 – 0.8413 = 0.1359

Table de la Loi Normale Centrée Réduite

$$X^* \rightarrow N(0,1)$$

$$P\left[X^* \prec t_\alpha\right] = 1\text{-}\alpha$$

	0,00	**0,01**	**0,02**	**0,03**	**0,04**	**0,05**	**0,06**	**0,07**	**0,08**	**0,09**
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,99865	0,99869	0,99874	0,99878	0,99882	0,99886	0,99889	0,99893	0,99896	0,99900
3,1	0,99903	0,99906	0,99910	0,99913	0,99916	0,99918	0,99921	0,99924	0,99926	0,99929
3,2	0,99931	0,99934	0,99936	0,99938	0,99940	0,99942	0,99944	0,99946	0,99948	0,99950
3,3	0,99952	0,99953	0,99955	0,99957	0,99958	0,99960	0,99961	0,99962	0,99964	0,99965
3,4	0,99966	0,99968	0,99969	0,99970	0,99971	0,99972	0,99973	0,99974	0,99975	0,99976
3,5	0,99977	0,99978	0,99978	0,99979	0,99980	0,99981	0,99981	0,99982	0,99983	0,99983
3,6	0,99984	0,99985	0,99985	0,99986	0,99986	0,99987	0,99987	0,99988	0,99988	0,99989
3,7	0,99989	0,99990	0,99990	0,99990	0,99991	0,99991	0,99992	0,99992	0,99992	0,99992
3,8	0,99993	0,99993	0,99993	0,99994	0,99994	0,99994	0,99994	0,99995	0,99995	0,99995
3,9	0,99995	0,99995	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99997	0,99997

NB : ***Pour avoir la probabilité qui correspond à t_α = 1.53 il faut lire l'intersection de la ligne 1.5 et de la colonne 0.03 (1.53 = 1.5 + 0.03) ainsi P[X<1.53] = 0.9370***

IV- Les distributions dérivées de la loi normale :

Les lois de probabilités qui seront présentées dans cette section sont définies à partir de la loi normale

1- Loi de Khi-deux(χ^2) :

Soient n variables aléatoires indépendantes $U_1, U_2, U_3, \ldots U_n$ suivant chacune la loi normale centrée réduite.

Ainsi la somme : $$U_1^2 + U_2^2 + U_3^2 + \ldots + U_n^2 = \sum_{i=1}^{n} U_i^2$$

Représente une variable aléatoire dont la distribution est celle d'une χ^2 à n degrés de liberté (n ddl) car c'est la somme de n carrés de lois normales centrées et réduites. Cette loi se note $\chi^2(n)$ ou χ^2_n.

Propriétés :

- $E(\chi^2_n) = n$
- $V(\chi^2_n) = 2n$

Lecture de la table de probabilité :

La variable χ^2 est tabulée en fonction du nombre de ddl. La table donne pour différentes valeurs de α, la valeur de x telle que : $P(\chi^2_{(n)} > x) = \alpha$

Application :

Calculer $P(\chi2_{(10)} > 20.48)$

Une lecture de la table de khi-deux nous donne $P(\chi2_{(10)} > 20.48) = 0.025$

2- Loi de Student (T) :

Soient n+1 variables aléatoires indépendantes $U_1, U_2, U_3 \ldots U_n$ et U_{n+1} suivant chacune la loi normale centrée réduite. Ainsi la quantité suivante :

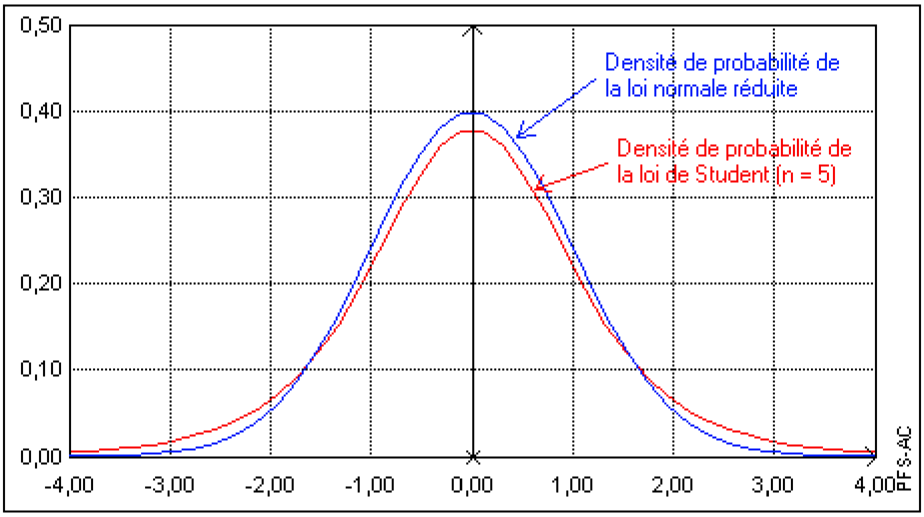
$$T = \frac{U_{n+1}}{\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} U_i^2}}$$

Représente une variable aléatoire dont la distribution est celle d'une loi de Student à n de grés de liberté (n= ddl). Cette loi se note T(n) ou T_n.

Propriétés :

- $E(T_n) = 0$
- $V(T_n) = (n/n-2)$

Graphiquement la courbe de densité de probabilité de la loi de Student est une courbe en cloche symétrique par rapport à l'axe des ordonnées, mais qui est plus évasée que celle de la LNCR.



Lecture de la table de probabilité :

La table de Student donne pour un nombre n de ddl déterminé et pour une probabilité α la valeur t_α de la variable de Student telle que :

$P(T< t_\alpha) = 1- \alpha$

Exercice : Soit la variable T qui suit une loi de Student à 20ddl :

- Déterminer la valeur de t telle que : P(T<t)=0.7
- Déterminer la valeur de t telle que P(T>t)= 0.05
- Calculer P(T>0.86)
- Déterminer la valeur de t telle que $P(|T| < t) = 0.98$

Corrigé :

Une lecture de la table de student nous conduit aux résultats suivants

- $P(T<t)=0.7 \rightarrow t = 0.533$
- $P(T>t)= 0.05 \rightarrow P(T<t)=0.95 \rightarrow t = 1.725$
- $P(T>0.86) = 1 - P(T< 0.86) = 1 - 0.8 = 0.2$
- $P(|T| < t)=0.98 \rightarrow 2 \times P(T<t) - 1 = 0.98$ (puisque la loi de student est symétrique) $\rightarrow P(T<t) = 0.99 \rightarrow t = 2.528$

Table de la loi de Khi-deux

$$X \rightarrow \chi^{2}_{n}$$

n : le nombre de degrés de liberté

$$P\left[X \succ \chi^{2}_{\alpha}\right] = \alpha$$

	α														
n	**0,995**	**0,99**	**0,975**	**0,95**	**0,9**	**0,75**	**0,5**	**0,3**	**0,25**	**0,1**	**0,05**	**0,025**	**0,01**	**0,005**	**0,001**
1	0,000	0,000	0,001	0,004	0,016	0,102	0,455	1,074	1,320	2,706	3,841	5,020	6,635	7,880	10,827
2	0,010	0,020	0,051	0,103	0,211	0,575	1,386	2,408	2,770	4,605	5,991	7,380	9,210	10,600	13,815
3	0,072	0,115	0,216	0,352	0,584	1,210	2,366	3,665	4,110	6,251	7,815	9,350	11,345	13,000	16,266
4	0,207	0,297	0,484	0,711	1,064	1,920	3,357	4,878	5,390	7,779	9,488	11,140	13,277	15,000	18,467
5	0,412	0,554	0,831	1,150	1,610	2,670	4,351	6,064	6,630	9,236	11,070	12,830	15,086	16,860	20,515
6	0,676	0,872	1,240	1,640	2,204	3,450	5,348	7,231	7,840	10,645	12,592	14,450	16,812	18,650	22,457
7	0,989	1,240	1,690	2,170	2,833	4,250	6,346	8,383	9,040	12,017	14,067	16,010	18,475	20,370	24,322
8	1,340	1,640	2,180	2,730	3,490	5,070	7,344	9,524	10,220	13,362	15,507	17,530	20,090	22,030	26,125
9	1,730	2,090	2,700	3,330	4,168	5,900	8,343	10,656	11,390	14,684	16,919	19,020	21,666	23,660	27,877
10	2,160	2,560	3,250	3,940	4,865	6,730	9,342	11,781	12,550	15,987	18,307	20,480	23,209	25,250	29,588
11	2,600	3,050	3,820	4,570	5,578	7,580	10,341	12,899	13,700	17,275	19,675	21,920	24,725	26,820	31,264
12	3,070	3,570	4,400	5,230	6,304	8,430	11,340	14,011	14,850	18,549	21,026	23,340	26,217	28,350	32,909
13	3,570	4,110	5,010	5,890	7,042	9,300	12,340	15,119	15,980	19,812	22,362	24,740	27,688	29,870	34,528
14	4,070	4,660	5,630	6,570	7,790	10,160	13,339	16,222	17,120	21,064	23,685	26,120	29,141	31,370	36,123
15	4,600	5,230	6,260	7,260	8,547	11,030	14,339	17,322	18,250	22,307	24,996	27,490	30,578	32,850	37,697
16	5,140	5,810	6,910	7,960	9,312	11,910	15,338	18,418	19,370	23,542	26,296	28,850	32,000	34,310	39,252
17	5,700	6,410	7,560	8,670	10,085	12,790	16,338	19,511	20,490	24,769	27,587	30,190	33,409	35,760	40,790
18	6,260	7,010	8,230	9,390	10,865	13,670	17,338	20,601	21,600	25,989	28,869	31,530	34,805	37,190	42,312
19	6,840	7,630	8,910	10,120	11,651	14,560	18,338	21,689	22,720	27,204	30,144	32,850	36,191	38,620	43,820
20	7,430	8,260	9,590	10,850	12,443	15,450	19,337	22,775	23,830	28,412	31,410	34,140	37,566	40,030	45,315
21	8,030	8,900	10,280	11,590	13,240	16,340	20,337	23,858	24,930	29,615	32,671	35,480	38,932	41,430	46,797
22	8,640	9,540	10,980	12,340	14,041	17,240	21,337	24,939	26,040	30,813	33,924	36,780	40,289	42,830	48,268
23	9,260	10,200	11,690	13,090	14,848	18,130	22,337	26,018	27,140	32,007	35,172	38,080	41,638	44,210	49,728
24	9,890	10,860	12,400	13,850	15,659	19,030	23,337	27,096	28,240	33,196	36,415	39,360	42,980	45,590	51,179
25	10,560	11,520	13,120	14,610	16,473	19,940	24,337	28,172	29,340	34,382	37,652	40,650	44,314	46,960	52,620
26	11,200	12,200	13,840	15,380	17,292	20,840	25,336	29,246	30,430	35,563	38,885	41,920	45,642	48,320	54,052
27	11,840	12,880	15,570	16,150	18,114	21,750	26,336	30,319	31,530	36,741	40,113	43,190	46,963	49,670	55,476
28	12,490	13,560	15,310	16,930	18,939	22,660	27,336	31,391	32,620	37,916	41,337	44,460	48,278	51,020	56,893
29	13,150	14,260	16,050	17,710	19,768	23,560	28,236	32,461	33,710	39,087	42,557	45,720	49,588	52,360	58,302
30	13,820	14,950	16,790	18,490	20,599	24,480	29,336	33,530	34,800	40,256	43,773	46,980	50,892	53,700	59,703

Table de la Loi de Student

$X \rightarrow T(n)$

n: nombre de degrés de liberté

$$P\left[X \prec t_{\alpha}\right] = 1\text{-}\alpha$$

		1- α							
		0,6	**0,7**	**0,8**	**0,9**	**0,95**	**0,975**	**0,99**	**0,995**
N	**1**	0,325	0,727	1,376	3,078	6,314	12,710	31,820	63,660
	2	0,289	0,617	1,061	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925
	3	0,277	0,584	0,978	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841
	4	0,271	0,569	0,941	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604
	5	0,267	0,559	0,920	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032
	6	0,265	0,553	0,906	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707
	7	0,263	0,549	0,896	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499
	8	0,262	0,546	0,889	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355
	9	0,261	0,543	0,883	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250
	10	0,260	0,542	0,879	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169
	11	0,260	0,540	0,876	1,363	1,796	2,201	2,718	3,106
	12	0,259	0,539	0,873	1,356	1,782	2,179	2,681	3,055
	13	0,259	0,538	0,870	1,350	1,771	2,160	2,650	3,012
	14	0,258	0,537	0,868	1,345	1,761	2,145	2,624	2,977
	15	0,258	0,536	0,866	1,341	1,753	2,131	2,602	2,947
	16	0,258	0,535	0,865	1,337	1,746	2,120	2,583	2,921
	17	0,257	0,534	0,863	1,333	1,740	2,110	2,567	2,898
	18	0,257	0,534	0,862	1,330	1,734	2,101	2,552	2,878
	19	0,257	0,533	0,861	1,328	1,729	2,093	2,539	2,861
	20	0,257	0,533	0,860	1,325	1,725	2,086	2,528	2,845
	21	0,257	0,532	0,859	1,323	1,721	2,080	2,518	2,831
	22	0,256	0,532	0,858	1,321	1,717	2,074	2,508	2,819
	23	0,256	0,532	0,858	1,319	1,714	2,069	2,500	2,807
	24	0,256	0,531	0,857	1,318	1,711	2,064	2,492	2,797
	25	0,256	0,531	0,856	1,316	1,708	2,060	2,485	2,787
	26	0,256	0,531	0,856	1,315	1,706	2,056	2,479	2,779
	27	0,256	0,531	0,855	1,314	1,703	2,052	2,473	2,771
	28	0,256	0,530	0,855	1,313	1,701	2,048	2,467	2,763
	29	0,256	0,530	0,854	1,311	1,699	2,045	2,462	2,756
	30	0,256	0,530	0,854	1,310	1,697	2,042	2,457	2,750