Corrigé du TD N°6

Exercice 1

Il s'agit de tester l'hypothèse que les préférences pour les marques sont égalitaires contre l'hypothèse que les préférences ne sont pas égalitaires.

H_0 : Les préférences des étudiants sont égalitaires (la répartition des résultats est uniforme)

H_1 : Les préférences ne sont pas égalitaires (la répartition des résultats n'est pas uniforme)

Pour décider entre H_0 et H_1 il faut calculer la statistique de χ_c^2 et la comparer à celle figurant sur la table χ_α^2

Marque préférée	Effectif observé (ni)	Probabilité théorique (pi)	Effectif théorique ($n.p_i$)	$(n_i-n.p_i)^2/n.p_i$
Adidas	50	1/5	40	$10^2/40=2.5$
Puma	35	1/5	40	$5^2/40=0.625$
Nike	60	1/5	40	$20^2/40=10$
Reebok	25	1/5	40	$15^2/40=5.625$
Lotto	30	1/5	40	$10^2/40=2.5$
	n=200			**=21.25**

ddl= k-l-1 = 5-0-1=4

$\chi^2_{5\%}(4)$ = 9.488 (d'après la table de X^2)

$\chi^2_{5\%}(4) < \chi_c^2$

→ On retient l'hypothèse H_1 → Les préférences des étudiants ne sont pas égalitaires.

Exercice 2

Il faut d'abord estimer le paramètre λ de la loi de poisson à partir de la moyenne des observations :

Nombre de pannes mensuelles x_i	Nombre de mois ni	X_i n_i
0	8	0
1	16	16
2	8	16
3	3	9
4	6	24
5	5	25
6	3	18
7	2	14
8 et +	1	8
	$\sum n_i = 52$	$\sum x_i n_i= 130$

$\hat{\lambda} = \overline{X} = \sum x_i n_i / \sum n_i = 130/52 = 2.5$

Il s'agit de tester l'hypothèse que le variable aléatoire nombre de pannes mensuelles qu'on peut noter X suit une loi de poisson de paramètre $\lambda = 1.88$ contre l'hypothèse que cette variable ne suit pas une loi de poisson.

H_0 : X $\rightarrow$ P(2.5)

H1 : X $\not\rightarrow$ P(2.5)

Nombre de pannes x_i	Effectif observé n_i	Prob théorique p_i P $(X=x_i) = e^{-2.5} 2.5^x / x!$	Effectif théorique $e_i = n \times p_i$	Calcul de X^2 $= \sum(n_i - e_i)^2/e_i$
0	8 } 24	0.0821	4.269 } 14.939	5.495
1	16	0.2052	10.67	
2	8	0.2565	13.338	2.136
3	3	0.2138	11.117	5.926
4	6	0.1336	6.947	0.129
5	5 } 11	0.0668	3.473 } 5.593	5.228
6	3	0.0278	1.445	
7	2	0.0099	0.514	
8 et plus	1	0.0031	0.161	
Total	**n=52**			χ^2_c **= 18.914**

Après regroupement des effectifs théoriques inférieures à 5 on dispose de 5 classes d'où ddl= k-l-1 = 5-1-1 = 3

$\chi^2_{1\%}(3) = 11.345$ (d'après la table de χ^2)

$\chi^2_{1\%}(3) < \chi^2_c$

$\rightarrow$ On rejette l'hypothèse H_0 $\rightarrow$ La variable aléatoire nombre de panne ne suit pas une loi de poisson de paramètre $\lambda = 2.5$

Exercice 3

Le nombre d'ampoules défectueuses varie de 0 à 5, le premier paramètre de la loi n, est donc connue (n=3) , quant à la proportion p des ampoules défectueuses p , elle peut être estimée à partir de la moyenne des observations :

Nombre d'ampoules défectueuses y_i	Nombre de lot ni	y_i n_i
0	190	0
1	95	95
2	10	20
3	5	15
	$\sum n_i = 300$	$\sum y_i n_i = 130$

$\hat{P} = \overline{X} = \sum y_i n_i / n \sum n_i = 130/(3 \times 300) = 0.14$

Il s'agit de tester l'hypothèse que la variable aléatoire nombre d'ampoules défectueuse suit une loi de binomiale de paramètre n=3 , p=0.14 contre l'hypothèse que cette variable ne suit pas une loi binomiale.

H_0 : Y $\rightarrow$ B(3 ; 0.14)

H1 : Y $\not\rightarrow$ B(3; 0.14)

Nombre d'ampoules défectueuses y_i	Effectif observé n_i	Prob théorique p_i P $(Y=y_i) = C_3^y\, 0.14^y \times 0.86^{3-y}$	Effectif théorique $e_i = n \times p_i$	Calcul de $X^2 = \sum(n_i - e_i)^2/e_i$
0	190	0.6361	190.83	0.0036
1	95	0.3106	93.18	0.0355
2	10 } 15	0.0506	15.18 } 15.99	0.0613
3	5	0.0027	0.81	
Total	**n=300**	$\sum$ **=1**	$\sum = 300$	χ_c^2 **= 0.1**

Après regroupement des effectifs théoriques inférieurs à 5 on dispose de 3 classes

ddl= k-l-1 = 3-1-1 = 1

$\chi^2_{5\%}(1) = 3.841$ (d'après la table de χ^2)

$\chi^2_{5\%}(1) > \chi^2_c$

$\rightarrow$ On retient l'hypothèse H_0 $\rightarrow$ La variable aléatoire nombre des ampoules défectueuse suit une loi binomiale de paramètre n=3 et p=0.14

Exercice 4

Si on désigne par X le produit préféré et par Y la région, les hypothèses du test s'expriment ainsi :

H_0 : X et Y sont indépendants

H_1 : X et Y sont dépendants (le type de produit préféré dépend de la région).

Les tableaux des effectifs observés et des effectifs théoriques reflétant l'hypothèse d'indépendance se présentent comme suit :

Tableau des effectifs observés

	Produit 1	Produit 2	Produit 3	Produit4	Totaux
Région A	40	80	50	40	210
Région B	20	30	60	80	190
Totaux	60	110	110	120	400

Tableau des effectifs théoriques

	Produit 1	Produit 2	Produit 3	Produit4
Région A	31.5	57.75	57.75	63
Région B	28.5	52.25	52.25	57

Le calcul de χ_c^2 :

χ_c^2 = (31.5-40)²/31.5 + (57.75-80)²/57.75 + (57.75 -50)²/57.75 + (63-40)²/63 + (28.5-20)²/28.5 + (52.25-30)²/52.25 + (52.25 – 60)²/52.25 + (57- 80)²/57

= 2.293 +8.572 + 1.04 + 8.396 + 2.535 + 9.474+1.149+ 9.28 = 42.739

ddl= (4-1) x(2-1) = 3x1 = 3

$\chi^2_{1\%}(3)$ = 11.345 (d'après la table de χ^2)

$\chi_c^2 > \chi^2_{1\%}(3)$

→ On retient l'hypothèse H_1 (le type de produit préféré dépend de la région)