Corrigé du TD N°2

Exercice 1

1) n= 5, p = 0.1, X → B (5, 0.1)

→ Pour tout x = 0,1,2,3,4,5. P (X= x) = C_5^x x 0.1^x x 0.9^{5-x}

x_i	0	1	2	3	4	5
P_i	C_5^0 x 0.1^0 x 0.9^5 = 0.5905	C_5^1 x 0.1^1 x 0.9^4 = 0.328	C_5^2 x 0.1^2 x 0.9^3 =0.0729	C_5^3 x 0.1^3 x 0.9^2 =0.0081	C_5^4 x 0.1^4 x 0.9^1 =0.0004	C_5^5 x 0.1^5 x 0.9^0 =0.00001

2) La fonction de répartition de la variable X se détermine comme suit :

Pour x < 0 , F(x) = 0

Pour 0≤x<1 , F(x) = 0.5905

Pour 1≤x<2 , F(x) = 0.9185

Pour 2≤x<3 , F(x) = 0.9914

Pour 3≤x<4 , F(x) = 0.9995

Pour 3≤x<4 , F(x) = 0.9999

Pour x≥5, F(x) = 1

3) E (X) = n x p = 5 x 0.1 = 0.5
   V (X) = n x p x q = 5 x 0.1 x 0.9 = 0.45

Exercice 2

1) X → B (300, 0.01)
   n= 300 >30 et p = 0.01 < 0.1 → Cette loi binomiale peut être approximée par une loi de poisson de paramètre λ = n x p = 300 x 0.01 = 3
   → Pour tout x = 0,1,2,3, …., 300 P (X = x) = e^{-3} 3^x / x !
2) P (X < 3) = P (X= 0) + P (X= 1) + P (X= 2) = e^{-3} 3^0 / 0 ! + e^{-3} 3^1 / 1 ! + e^{-3} 3^2 / 2 !
   = 0.0498 +0.1494 + 0.224 = 0.4232

Exercice 3

1) $m = 160$ et $\sigma = 15$ d'où $X \rightarrow N(160, 15)$

   $P(130 \le X \le 175) = P((130 - 160)/15 \le (X - 160)/15 \le (175 - 160)/15)$

   $= P(-2 \le U \le 1) = F(1) - [1-F(2)] = F(1) + F(2) - 1$ (F étant la fonction de répartition de la loi normale centrée et réduite)

   $= 0.8413+0.9772-1 = 0.8185$

2) $P(X\le 200) = P((X - 160)/15 \le (200-160)/15) = P(U \le 2.66) = F(2.66) = 0.9961$

3) Il y a rupture de stock quand la demande dépasse le stock → X > Stock.

   Avec un stock de 180 unités la probabilité de rupture des stocks est :

   $P(X > 180) = P((X-160)/15 > (180-160)/15) = P(U > 1.33) = 1 - P(U < 1.33)$

   $= 1 - F(1.33) = 1 - 0.9082 = 0.0918$ soit 9.18 % → La probabilité de rupture est supérieur à 5 % et le gestionnaire de stock a tort.

4) Soit x la valeur de ce stock alors $P(X \le x) = 0.9$

   $\rightarrow P((X - 160)/15 \le (x-160)/15) = 0.9 \rightarrow P(U \le (x-160)/15) = 0.9 \approx F(1.29)$

   $\rightarrow (x - 160)/15) = 1.29 \rightarrow x = 160 + 1.29 \times 15 = 179.35$

Exercice 4

Soit X la variable aléatoire qui correspond au diamètre des pipe-lines,

$m = 50$ cm $= 500$ mm , $\sigma = 0.25$ d'où $X \rightarrow N(500, 0.25)$

soit l'évènement A : rejet des canalisations, → $\overline{A}$: les canalisations sont acceptée,

$P(A) = 1 - P(\overline{A})$.

Les canalisations sont acceptés si leur diamètre est compris entre 49.95 et 50.05 cm (c'est-à-dire entre 499.5 et 500.5 mm) d'où :

$P(\overline{A}) = P(499.5 \le X \le 500.5) = P((499.5 - 500)/0.25 \le (X - 500)/0.25 \le (500 - 500.5)/0.25)$

$= P(-2 \le U \le 2) = 2F(2) - 1$ (F étant la fonction de répartition de la loi normale centrée et réduite)

$= 2 \times 0.9772 - 1 = 0.9544$

$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - 0.9544 = 0.0456$

Exercice 5

Soit X_1 la production du premier gisement et X_2 la production du deuxième gisement.

$m_1 = 2000$ tonnes, $\sigma_1 = 150$ tonnes d'où $X_1 \rightarrow N(2000, 150)$

$m_2 = 3000$ tonnes, $\sigma_2 = 200$ tonnes d'où $X_2 \rightarrow N(3000, 200)$

si on désigne par X la production journalière totale de la société alors :

$X = X_1 + X_2$, X étant la somme de deux lois normales, elle suit donc une loi normale,

$X \rightarrow N(m, \sigma)$ avec $m = m_1 + m_2 = 2000 + 3000 = 5000$ et $\sigma = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$

$= \sqrt{150^2 + 200^2} = 250$

D'où $P(X > 5200) = P((X-5000)/250 > (5200 - 5000)/250) = P(U > 0.8)$

$= 1 - P(U < 0.8) = 1 - F(0.8) = 1 - 0.7881 = 0.2119$

Exercice 6

1) On fractionne T = 30 minutes en intervalle de 1 minutes. On a donc t = 1 minute et n = T/t = 30. On peut admettre que dans chacun des intervalles de 1 minute, deux éventualités in compatibles sont possible :

- Le commerçant reçoit un client avec une probabilité p = 8/60 = 2/15
- Le commerçant ne reçoit pas un client avec une probabilité q = 1-p = 13/15

Ainsi le nombre de client reçu en 30 minutes suit une loi binomiale (avec n = 30 et p = 2/15) que l'on peut approximer par une loi de poisson de paramètre λ = n x p = 30 x 2/15 = 4 d'où pour tout

$x = 0,1,..,30 \quad P (X = x) = e^{-4} 4^x / x !$

2) $P (X = 3) = e^{-4} 4^3 / 3 ! = 0.1954$