Corrigé du TD N°4

Exercice 1

1) Soit X le résultat de test d'informatique.

σ est connu, ($\sigma = \sqrt{225}$ = 15) d'où $\overline{X} \to$ N (m, σ / $\sqrt{n}$)

$\hat{m} = \overline{X}$ = 70.6

2) $\dfrac{\overline{X} - m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \to N(0,1)$

$$P\left(\left| \frac{\overline{X} - m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \right| \prec t_{\frac{\alpha}{2}} \right) = 1 - \alpha$$

$$m \in \left[\overline{X} - t_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \; ; \; \overline{X} + t_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right]$$

$1 - \alpha = 0.99 \to \alpha = 0.01 \to \alpha_{/2} = 0.005 \to F(t_{\alpha/2}) = 0.995 \to t_{\alpha/2} = 2.58$

La limite inférieure de l'intervalle de confiance est donc :

LI = $\overline{X} - t_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ = 70.6 – 2.58 x 15 / $\sqrt{25}$ = 62.86

Et la limite supérieure de l'intervalle de confiance est donc :

LS = $\overline{X} + t_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ = 70.6 + 2.58 x 15 / $\sqrt{25}$ = 78.34

Exercice 2

Soit X la longueur des tiges, E ($\overline{X}$) = m, $\to$ $\overline{X}$ est un estimateur sans biais de m.

le tirage est sans remise $\to$ V ($\overline{X}$) = (σ^2 /n) * [(N-n)/(N-1)] $\to$ 0 quand n $\to \infty$ } $\overline{X}$ est un estimateur convergeant de m

$\overline{X} \to$ N (m, ((σ / $\sqrt{n}$) x $\sqrt{(N - n)/(N - 1)}$)

$$\frac{\overline{X}-m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\left[\sqrt{N-n/N-1}\right]} \to N(0,1)$$

$$P\left(\left|\frac{\overline{X}-m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\sqrt{N-n/N-1}}\right| \prec t_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 1-\alpha$$

$$m \in \left[\overline{X} - t_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\sqrt{N-n/N-1}\ ;\ \overline{X} + t_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\sqrt{N-n/N-1}\right]$$

$1-\alpha = 0.95 \to \alpha = 0.05 \to \alpha_{/2} = 0.025 \to F(t_{\alpha/2}) = 0.975 \to t_{\alpha/2} = 1.96$

La limite inférieure de l'intervalle de confiance est donc :

LI = $\overline{X} - t_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\sqrt{N-n/N-1}$ = 250 – 1.96 x 9 / $\sqrt{36}$ x $\sqrt{280-36/280-1}$ = 247.250

Et la limite supérieure de l'intervalle de confiance est donc :

LS = $\overline{X} + t_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\sqrt{N-n/N-1}$ = 250 + 1.96 x 9 / $\sqrt{36}$ x $\sqrt{280-36/280-1}$ = 252.749

Exercice 3

1-Soit X le diamètre des pièces.

σ est connu, (σ = 2.75) d'où $\overline{X} \to$ N (m, $\sigma / \sqrt{n}$)

$$\frac{\overline{X}-m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \to N(0,1)$$

$$P\left(\left|\frac{\overline{X}-m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right| \prec t_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 1-\alpha$$

$$m \in \left[\overline{X} - t_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\ ;\ \overline{X} + t_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$$

$1-\alpha = 0.95 \to \alpha = 0.05 \to \alpha_{/2} = 0.025 \to F(t_{\alpha/2}) = 0.9975 \to t_{\alpha/2} = 1.96$

La limite inférieure de l'intervalle de confiance est donc :

LI = $\overline{X} - t_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ = 54 – 1.96 x 2.75/ $\sqrt{64}$ = 53.3262

Et la limite supérieure de l'intervalle de confiance est donc :

LS = $\overline{X} + t_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ = 54 + 1.96 x 2.75/ $\sqrt{64}$ = 54.6738

2- La marge d'erreur associé à cet intervalle de confiance est E= $t_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ = 1.96 x 2.75/ $\sqrt{64}$

= 0.6738

3- Si E = 0.5 et 1 – α = 0.99 → α = 0.01 → $\alpha_{/2}$ = 0.005 → F($t_{\alpha/2}$) = 0.995 → $t_{\alpha/2}$ = 2.58

$$E = t_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow n = \left(\frac{t_{\frac{\alpha}{2}} \sigma}{E} \right)^2$$ = (2.58 x 2.75 / 0.5)² = 201.356 ≈202

Exercice 4

1-Soit X la teneur en magnésium de l'eau minérale. X → N (m, σ)

$\hat{m} = \overline{X}$ = $\sum x_i/n$ = (245 + 2x 246 + 3x 247 + 2 x 248 + 249 +250) / 10 = 247.3

2- σ est inconnu, et n = 10< 30, d'où $\frac{\overline{X} - m}{\frac{S}{\sqrt{n}}} \longrightarrow$ T(n-1)

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{1}^{n} (Xi - \overline{X})^2}{n-1}}$$

$$S = \sqrt{\frac{(245-247.3)^2 + 2(246-247.3)^2 + 3(247-247.3)^2 + 2(248-247.3)^2 + (249-247.3)^2 + (250-247.3)^2}{9}}$$

S = 1.4944

$$P\left(\left| \frac{\overline{X} - m}{\frac{s}{\sqrt{n}}} \right| \prec t_{\frac{\alpha}{2}} \right) = 1 - \alpha$$

$$m \in \left[\overline{X} - t_{\frac{\alpha}{2}} \frac{S}{\sqrt{n}} \; ; \; \overline{X} + t_{\frac{\alpha}{2}} \frac{S}{\sqrt{n}} \right]$$

1 – α = 0.95 → α = 0.05 → $\alpha_{/2}$ = 0.025 et ddl = 9 → $t_{\alpha/2}$ = 2.262

La limite inférieure de l'intervalle de confiance est donc :

LI = $\overline{X} - t_{\frac{\alpha}{2}} \frac{S}{\sqrt{n}}$ = 247.3 – 2.262 x 1.4944 / $\sqrt{10}$ = 246.232

Et la limite supérieure de l'intervalle de confiance est donc :

LS = $\overline{X} + t_{\frac{\alpha}{2}} \frac{S}{\sqrt{n}}$ = 247.3 – 2.262 x 1.4944 / $\sqrt{10}$ = 248.369

3- La marge d'erreur associé à cet intervalle de confiance est E= $t_{\frac{\alpha}{2}} \frac{S}{\sqrt{n}}$

= 2.262 x 1.4944/ $\sqrt{10}$ = 1.069

Exercice 5

$$f \rightarrow N(p, \sqrt{\frac{pq}{n}}) \;\; d'où \;\; \frac{f-p}{\sqrt{\frac{pq}{n}}} \rightarrow N(0,1)$$

f= cas favorables/taille de l'échantillon= k/n = 380/700 = 0.5429 → 1-f = 0.4571

$$P\left(\left|\frac{f-p}{\sqrt{\frac{pq}{n}}}\right| \leq t_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 1-\alpha$$

$$f - t_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{f(1-f)}{n}} \leq p \leq f + t_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{f(1-f)}{n}}$$

1 – α = 0.95 → α = 0.05 → $\alpha_{/2}$ = 0.025 → F($t_{\alpha/2}$) = 0.975 → $t_{\alpha/2}$ = 1.96

La limite inférieure de l'intervalle de confiance est donc :

LI = $f - t_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{f'(1-f)}{n}}$ = 0.5429 – 1.96 x $\sqrt{\frac{0.5429x0.4571}{700}}$ = 0.506

Et la limite supérieure de l'intervalle de confiance est donc :

LS = $f + t_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{f(1-f)}{n}}$ = 0.5429 + 1.96 x $\sqrt{\frac{0.5429x0.4571}{700}}$ = 0.5798

E = $t_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{f'(1-f)}{n}}$ = 1.96 x $\sqrt{\frac{0.5429x0.4571}{700}}$ = 0.0369

Exercice 6

$$f \rightarrow N(p,\sqrt{\frac{pq}{n}}) \;\; d'où \;\; \frac{f-p}{\sqrt{\frac{pq}{n}}} \rightarrow N(0,1)$$

$$P\left(\left|\frac{f-p}{\sqrt{\frac{pq}{n}}}\right| \leq t_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 1-\alpha$$

$$f - t_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{f'(1-f)}{n}} \leq p \leq f + t_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{f(1-f)}{n}}$$

E = $t_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{f'(1-f)}{n}}$ → $n = \frac{t^2_{\alpha/2}\; p\,(1-p)}{E^2}$

1 – α = 0.99 → α = 0.01 → $\alpha_{/2}$ = 0.005 → F($t_{\alpha/2}$) = 0.995 → $t_{\alpha/2}$ = 2.58

p=0.5 (car inconnue)

E = 0.05 → n = 2.58² x 0.5 x 0.5 / 0.05² = 665.64≈ 666

f= cas favorables/taille de l'échantillon= k/n = 180/666 = 0.2703 → 1-f = 0.7297

La limite inférieure de l'intervalle de confiance est donc :

LI = $f - t_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{f(1-f)}{n}}$ = 0.2703 – 2.58 x $\sqrt{\frac{0.2703x0.7297}{666}}$ = 0.2259

Et la limite supérieure de l'intervalle de confiance est donc :

LS = $f + t_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{f(1-f)}{n}}$ = 0.2703 + 2.58 x $\sqrt{\frac{0.2703x0.7297}{666}}$ = 0.3147

Exercice 7

Soit p_1 et p_2, les proportions réelles des abonnées dans les villes A et B, et f_1 et f_2 les proportions empiriques

$$\frac{(f_1 - f_2) - (p_1 - p_2)}{\sqrt{\frac{p_1(1-p_1)}{n_1} + \frac{p_2(1-p_2)}{n_2}}} \rightarrow N(0,1)$$

$$P\left(\left|\frac{(f_1-f_2)-(p_1-p_2)}{\sqrt{\frac{p_1(1-p_1)}{n_1}+\frac{p_2(1-p_2)}{n_2}}}\right|\leq t_{\frac{\alpha}{2}}\right)=1-\alpha$$

$$(f_1-f_2)-t_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{f_1(1-f_1)}{n_1}+\frac{f_2(1-f_2)}{n_2}}\leq(p_1-p_2)\leq(f_1-f_2)+t_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{f_1(1-f_1)}{n_1}+\frac{f_2(1-f_2)}{n_2}}$$

$f_1 = k_1/n_1 = 400/1000 = 0.4$ et $f_2 = k_2/n_2 = 675/1500 = 0.45$

$1 - \alpha = 0.99 \rightarrow \alpha = 0.01 \rightarrow \alpha_{/2} = 0.005 \rightarrow F(t_{\alpha/2}) = 0.995 \rightarrow t_{\alpha/2} = 2.58$

La limite inférieure de l'intervalle de confiance est donc :

LI = $(f_1-f_2)-t_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{f_1(1-f_1)}{n_1}+\frac{f_2(1-f_2)}{n_2}}$ = 0.4 – 0.45 – 2.58 $\sqrt{\frac{0.4x0.6}{1000}+\frac{0.45x0.55}{1500}}$ = - 0.1019

Et la limite supérieure de l'intervalle de confiance est donc :

LS = $(f_1-f_2)+t_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{f_1(1-f_1)}{n_1}+\frac{f_2(1-f_2)}{n_2}}$ = 0.4 – 0.45 + 2.58 $\sqrt{\frac{0.4x0.6}{1000}+\frac{0.45x0.55}{1500}}$ = - 0.0019

Exercice 8

Soit X_A le salaire des employés de la filiale A, et Soit X_B le salaire des employés de la filiale B.

$\overline{X}_A \rightarrow N(m_A, \sigma_A)$ et $\overline{X}_B \rightarrow N(m_B, \sigma_B)$

Si σ_A et σ_B sont connus alors $\frac{\overline{X}_A - m_A}{\frac{\sigma_A}{\sqrt{n_A}}} \rightarrow N(0,1)$ et $\frac{\overline{X}_B - m_B}{\frac{\sigma_B}{\sqrt{n_B}}} \rightarrow N(0,1)$

D'où :

$$\frac{(\overline{X}_A-\overline{X}_B)-(m_A-m_B)}{\sqrt{\frac{\sigma_A^2}{n_A}+\frac{\sigma_B^2}{n_B}}}\rightarrow N(0,1)$$

$$P\left(\left|\frac{(\overline{X}_A-\overline{X}_B)-(m_A-m_B)}{\sqrt{\frac{\sigma_A^2}{n_{1A}}+\frac{\sigma_B^2}{n_B}}}\right|\prec t_{\frac{\alpha}{2}}\right)=1-\alpha$$

$$P\left(-t_{\frac{\alpha}{2}} \prec \left|\frac{(\overline{X}_A-\overline{X}_B)-(m_A-m_B)}{\sqrt{\frac{\sigma_A^2}{n_B}+\frac{\sigma_B^2}{n_B}}}\right| \prec t_{\frac{\alpha}{2}}\right)=1-\alpha$$

$$\overline{X}_A-\overline{X}_B-t_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma_A^2}{n_A}+\frac{\sigma_B^2}{n_B}} \prec m_A-m_B \prec \overline{X}_A-\overline{X}_B+t_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma_A^2}{n_A}+\frac{\sigma_B^2}{n_B}}$$

$1-\alpha = 0.95 \rightarrow \alpha = 0.05 \rightarrow \alpha_{/2} = 0.0025 \rightarrow F(t_{\alpha/2}) = 0.9975 \rightarrow t_{\alpha/2} = 1.96$

La limite inférieure de l'intervalle de confiance est donc :

$$LI = \overline{X}_A-\overline{X}_B-t_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma_A^2}{n_A}+\frac{\sigma_B^2}{n_B}} = (450-500)-1.96\sqrt{\frac{130^2}{20}+\frac{150^2}{25}} = -131.875$$

Et la limite supérieure de l'intervalle de confiance est donc :

$$LS = \overline{X}_A-\overline{X}_B+t_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma_A^2}{n_A}+\frac{\sigma_B^2}{n_B}} = (450-500)+1.96\sqrt{\frac{130^2}{20}+\frac{150^2}{25}} = 31.875$$

Si σ_A et σ_B sont inconnus alors

$$\frac{(\overline{X}_A-\overline{X}_B)-(m_A-m_B)}{\sqrt{\frac{S_A^2}{n_A}+\frac{S_B^2}{n_B}}} \rightarrow N(0,1) \text{ (puisque } n_a + n_b - 2 = 43 > 30)$$

$$P\left(\left|\frac{(\overline{X}_A-\overline{X}_B)-(m_A-m_B)}{\sqrt{\frac{S_A^2}{n_{1A}}+\frac{S_B^2}{n_B}}}\right| \prec t_{\frac{\alpha}{2}}\right)=1-\alpha$$

$$P\left(-t_{\frac{\alpha}{2}} \prec \left|\frac{(\overline{X}_A-\overline{X}_B)-(m_A-m_B)}{\sqrt{\frac{S_A^2}{n_B}+\frac{S_B^2}{n_B}}}\right| \prec t_{\frac{\alpha}{2}}\right)=1-\alpha$$

$$\overline{X}_A-\overline{X}_B-t_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{S_A^2}{n_A}+\frac{S_B^2}{n_B}} \prec m_A-m_B \prec \overline{X}_A-\overline{X}_B+t_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{S_A^2}{n_A}+\frac{S_B^2}{n_B}}$$

La limite inférieure de l'intervalle de confiance est donc :

LI = $\overline{X}_A - \overline{X}_B - t_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{S_A^2}{n_A} + \frac{S_B^2}{n_B}}$ = $(450 - 500) - 1.96\sqrt{\frac{100^2}{20} + \frac{120^2}{25}}$ = - 114.292

Et la limite supérieure de l'intervalle de confiance est donc :

LS = $\overline{X}_A - \overline{X}_B + t_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{S_A^2}{n_A} + \frac{S_B^2}{n_B}}$ = $(450 - 500) + 1.96\sqrt{\frac{100^2}{20} + \frac{120^2}{25}}$ = 14.292